Magnetfeldbeschreibung mit verallgemeinerten poloidalen und toroidalen Skalaren

GERHARD GERLICH

Lehrstuhl B für Theoretische Physik der Technischen Universität Braunschweig

(Z. Naturforsch. 27 a, 1167—1172 [1972] ; eingegangen am 19. Februar 1972)

Representation of Magnetic Fields by Generalized Poloidal and Toroidal Scalars

Every solenoidal vector field can be represented by unique poloidal and toroidal scalars. This description is especially appropriate to the geometry of a sphere. A generalization which can be applied to a more or less complicated geometry could be elaborated by means of transforming integrability conditions of space into integrability conditions of surfaces. This formalism enables us to give simple proofs of other important representations of vector fields by two scalars (magnetic coordinates, complex-lamellar fields).

I. Verallgemeinerte poloidale und toroidale Felder

In der Theorie des hydromagnetischen Dynamos und anderen Theorien, in denen Magnetfelder oder allgemein divergenzfreie Vektorfelder bestimmt oder verwendet werden, ist es zweckmäßig, die Divergenzfreiheit des Vektorfeldes von vornherein durch ein besonders geeignetes Vektorpotential zu sichern, um die Zahl der unbekannten Funktionen und Differentialgleichungen zu verringern. Dazu dient die Darstellung des Magnetfeldes durch poloidale und toroidale Skalare:

(S1) Ist ein Vektorfeld $\boldsymbol{B}$ endlicher Energie divergenzfrei, läßt es sich durch zwei eindeutige Skalare a und b in der Form

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \Lambda\, a + \Lambda\, b = -\nabla \times (\nabla \times a\, \boldsymbol{r}) - \nabla \times (b\, \boldsymbol{r}) \qquad (1)$$

schreiben. Es ist $\boldsymbol{r}$ der Ortsvektor und Λ der dem Drehimpulsoperator der Quantenmechanik proportionale Operator $\boldsymbol{r} \times \nabla$. Man nennt a den poloidalen und b den toroidalen Skalar. Ist das divergenzfreie Feld $\boldsymbol{B}$ gegeben, erhält man a und b als Lösungen der Differentialgleichungen

$$\Lambda^2\, a = \Lambda \cdot \Lambda\, a = \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B}\,, \quad \Lambda^2\, b = \Lambda \cdot \Lambda\, b = \Lambda \cdot \boldsymbol{B}\,. \qquad (2)$$

Verlangt man, daß der Mittelwert von a und b für jede feste Kugelfläche um den Koordinatenursprung Null ist, haben die Differentialgleichungen (2) eindeutige Lösungen.

Verwendet wurde die Darstellung (1) schon von ELSASSER [1]. In dieser Form stammt der Satz von BACKUS [2], dessen Beweis deutlich auf Kugelkoordinaten zugeschnitten war und der vor allem ausnutzte, daß Λ^2 praktisch das Quadrat des Drehimpulsoperators ist. Die Darstellung (1) ist in der Praxis besonders nützlich, wenn Kugelgeometrie vorliegt (Magnetfeld einer Kugel oder Kugelschale), weil dann die Randbedingungen einfach werden.

Eine Verallgemeinerung des Satzes (S1), die wir (S2) nennen und in Abschnitt IV beweisen, erhält man, indem man für Λ schreibt

$$\Lambda = \nabla x^1 \times \nabla\,. \qquad (3)$$

Hier ist x^1 die erste Koordinate eines im allgemeinen krummlinigen Koordinatensystems x^1, x^2, x^3. Der Satz (S2) unterscheidet sich von (S1) neben (3) noch durch die Differentialgleichungen (2), die beim Beweis in Abschnitt IV gebracht werden. Den Satz (S1) erhält man aus (S2) als Spezialfall, wenn man setzt $x^1 = \frac{1}{2}\, r^2$, $x^2 = \vartheta$, $x^3 = \varphi$ (r, ϑ, φ sind die üblichen Kugelkoordinaten). Die Verallgemeinerung (S2) ist einer Darstellung von MORSE und FESHBACH [3] sehr ähnlich, die für ein divergenzfreies Feld schreiben

$$\boldsymbol{B} = \nabla f_1 + \nabla \times (f_2\, \boldsymbol{a}) + \nabla \times \nabla \times (f_3\, \boldsymbol{a})\,. \qquad (4)$$

Der Zusammenhang zwischen den Funktionen f_i und den Funktionen a, b läßt sich herstellen, wenn $\boldsymbol{a}$ ein flächennormales Vektorfeld ist. Sieht man von den zusätzlichen Einschränkungen ab, bleibt als wesentlicher Unterschied, daß drei und nicht zwei Funktionen vorkommen und daß a, b im Unterschied zu f_i eindeutig sind. In Anlehnung an (S1) nennen wir a und b verallgemeinerte poloidale und toroidale Skalare.

Sonderdruckanforderungen an Dr. G. GERLICH, Lehrstuhl für Theoret. Physik B, Techn. Universität Braunschweig, D-3300 *Braunschweig*, Mendelssohnstr. 1 A.

II. Der Flächenscharformalismus und die Graßmannsche Ergänzung

Die verallgemeinerte Darstellung (S2), die für einfachere und kompliziertere Geometrien verwendet werden kann, konnte gewonnen werden, indem Integrabilitätsbedingungen oder Integralsätze, die für Tangentialtensoren der einparametrigen Flächenschar $x^1 = \text{const}$ gelten, übertragen werden auf entsprechende Aussagen im Raum. Ein wesentlicher Trick besteht in der Anwendung der „Graßmannschen Ergänzung" für die Tangentialvektoren der Flächenschar.

Die Graßmannsche Ergänzung $*\boldsymbol{c}$ eines tangentialen Vektorfeldes $\boldsymbol{c}$ erhält man, wenn man in jedem Punkt den Vektor $\boldsymbol{c}$ um den Normalenvektor

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{|\nabla x^1|} \nabla x^1 \tag{5}$$

in negativem Sinn um 90° dreht:

$$* \boldsymbol{c} = -\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{c} . \tag{6}$$

Die Graßmannsche Ergänzung eines ebenen Vektorfeldes spielt eine wesentliche Rolle in der Arbeit von Blank, Friedrichs und Grad [4]. Es wird dort von „dualen" Vektoren gesprochen.

Man kann auch von einem beliebigen Vektorfeld, das nicht notwendig tangential an der Flächenschar liegt, das Kreuzprodukt mit dem Normalenvektor der Flächenschar bilden. Macht man dies formal mit dem Nabla-Operator, erhält man den Differentialoperator

$$\Lambda^* = \boldsymbol{n} \times \nabla . \tag{7}$$

Betrachtet man jede einzelne Fläche der Flächenschar $x^1 = \text{const}$ als zweidimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit, läßt sich in dieser Mannigfaltigkeit ein 2-dimensionaler Nabla-Operator definieren durch

$$\nabla^{\mathrm{F}} = g^{\alpha\beta} \boldsymbol{e}_\beta \partial_\alpha . \tag{8}$$

Wir verwenden die Summationskonvention, die griechischen Indizes laufen von 2 bis 3, die lateinischen von 1 bis 3, es sind die $\boldsymbol{e}_i$ die natürlichen Basisvektoren $\partial_i \boldsymbol{r}$ des Koordinatensystems x^1, x^2, x^3, und es ist $g^{\alpha\beta}$ die reziproke Matrix der zweireihigen Untermatrix $g_{\alpha\beta}$ von

$$g_{ik} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_k . \tag{9}$$

Man kann auch von dem Nabla-Operator ∇^{F} der Fläche die Graßmannsche Ergänzung bilden. Es gilt sogar

$$-*\nabla^{\mathrm{F}} = \boldsymbol{n} \times \nabla^{\mathrm{F}} = \boldsymbol{n} \times \nabla = \Lambda^* . \tag{10}$$

Wegen der Graßmannschen Ergänzung gibt es zwei äußerlich verschiedene Formen des Gaußschen Integralsatzes für eine Fläche F der Schar $x^1 = \text{const}$:

$$\int_F \Lambda^* \cdot \boldsymbol{c} \, \mathrm{d}F = \int_{R\mathrm{d}F} \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{t} \, \mathrm{d}s = \int_{R\mathrm{d}F} \boldsymbol{c} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} , \tag{11}$$

$$\int_F \nabla^{\mathrm{F}} \cdot \boldsymbol{c} \, \mathrm{d}F = -\int_{R\mathrm{d}F} *\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{t} \, \mathrm{d}s = -\int_{R\mathrm{d}F} *\boldsymbol{c} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} . \tag{12}$$

Der Einheitstangentialvektor $\boldsymbol{t}$ hat die übliche Orientierung. Besteht die Flächenschar aus mehrfach zusammenhängenden Flächen, sind dem Rand $R\,\mathrm{d}F$ auch die Schnittlinien hinzuzufügen, die die Flächen in einfach zusammenhängende zerlegen.

Die Dualität der Differentialoperatoren ∇^{F} und Λ^* erkennt man auch an den Beziehungen

$$\nabla^{\mathrm{F}} \cdot \Lambda^* c = 0 , \quad \Lambda^* \cdot \nabla^{\mathrm{F}} c = 0 , \tag{13}$$

die für beliebige zweimal stetig differenzierbare skalare Felder c gelten. Dies ist für die Flächenschar nichts anderes als die Aussage, daß das Differential einer Differentialform Null ist. Eine ausführlichere Darstellung der Rolle der Graßmannschen Ergänzung in diesem Zusammenhang insbesondere im Hinblick auf eine Erweiterung für n-dimensionale Mannigfaltigkeiten kann man finden in Gerlich [5].

Aus elementaren Mathematikbüchern ist bekannt, daß für (13) mit gewissen Einschränkungen auch die Umkehrung gilt, die der Inhalt des Satzes von Poincaré ist. In diesem Spezialfall bekommt der Satz von Poincaré dann die folgende Form:

(S3) Liegt das Vektorfeld $\boldsymbol{c}$ tangential an der Flächenschar $x^1 = \text{const}$ und erfüllt es die Differentialgleichung

$$\Lambda^* \cdot \boldsymbol{c} = 0 , \tag{14}$$

so ist es darstellbar mit einem Skalar c_1 in der Form

$$\boldsymbol{c} = \nabla^{\mathrm{F}} c_1 , \tag{15}$$

oder erfüllt es die Differentialgleichung

$$\nabla^{\mathrm{F}} \cdot \boldsymbol{c} = 0 , \tag{16}$$

so ist es darstellbar mit dem Skalar c_2 in der Form

$$\boldsymbol{c} = \Lambda^* c_2 . \tag{17}$$

Die Skalare c_1, c_2 sind durch $\boldsymbol{c}$ eindeutig bestimmt bis auf eine additive Funktion, die nur von x^1 abhängt.

III. Aus dem Flächenscharformalismus folgende Aussagen der Vektoranalysis

Der Satz (S3) ist meist noch nicht ohne weiteres anwendbar im dreidimensionalen Raum, da dort meist ∇ und nicht ∇^{F} vorkommt. Den nötigen Zusammenhang stellt die Gleichung

$$\frac{1}{|\nabla x^1|} \nabla \cdot \boldsymbol{c} = \nabla^{\mathrm{F}} \cdot \left(\frac{1}{|\nabla x^1|} \boldsymbol{c} \right) \tag{18}$$

her, die für ein Vektorfeld $\boldsymbol{c}$ gilt, das tangential an der Flächenschar $x^1 = \text{const}$ liegt. Die Gl. (18) gilt keineswegs, wenn das Vektorfeld $\boldsymbol{c}$ nur an *einer* Fläche der Schar tangential liegt. Man kann (18) noch etwas anders schreiben, wenn man ausnutzt

$$g^{11} = |\nabla x^1|^2 = g^*/g, \tag{19}$$

wobei g und g^* die Determinanten von g_{ik} und $g_{\alpha\beta}$ sind. Es läßt sich (18) mit (19) durch einfaches Nachrechnen beweisen. Die Beziehung (19) folgt nach elementaren Regeln der Determinantenrechnung aus der Tatsache, daß g^{ik} die inverse Matrix von g_{ik} ist. Es gelten (18) und (19) auch für eine $(n-1)$-dimensionale Hyperflächenschar $x^1 = \text{const}$ einer n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit. Für den tiefer liegenden Zusammenhang von (18) und (19) mit der Graßmannschen Ergänzung sei verwiesen auf GERLICH [5].

Der zweite Teil des Satzes (S3) liefert dann mit (18) und (13):

(S4) Liegt das Vektorfeld $\boldsymbol{c}$ tangential an der Flächenschar $x^1 = \text{const}$, so ist gleichwertig

$$\nabla \cdot \boldsymbol{c} = 0 \tag{20}$$

mit $\boldsymbol{c} = |\nabla x^1| \, \boldsymbol{n} \times \nabla c = \nabla x^1 \times \nabla c = \Lambda \, c$. (21)

Die skalare Funktion c ist eindeutig bis auf eine additive Funktion, die nur von x^1 abhängt.

Damit wird angedeutet, aus welchem Grund in dem Satz (S2) der Operator (3) vorkommt. Obwohl die folgenden Sätze (S5) bis (S7) schon lange bekannt sind und auch sehr häufig angewendet werden, werden sie meist in den üblichen Lehrbüchern über Vektoranalysis nicht angegeben beziehungsweise nicht oder falsch bewiesen, während die Beweise mit dem hier gebrachten Flächenscharformalismus sehr einfach sind.

Da ein differenzierbares Vektorfeld in der Umgebung eines Punktes, in der es von Null verschieden ist, tangential an einer einparametrigen Flächenschar liegt, die wir als erste Koordinate x^1 eines Koordinatensystems wählen, erhält man aus (S4) sofort die Darstellung divergenzfreier Vektorfelder durch magnetische Koordinaten:

(S5) Ist ein stetig differenzierbares Vektorfeld $\boldsymbol{a}$ divergenzfrei, läßt sich in einer geeigneten Umgebung, in der es von Null verschieden ist, ein Koordinatensystem finden, in dem $\boldsymbol{a}$ die Form hat

$$\boldsymbol{a} = \nabla x^1 \times \nabla x^2 \,. \tag{22}$$

Man muß beachten, daß es sich hier um eine *lokale* Darstellung handelt. Über die Differenzierbarkeitseigenschaften lassen sich die folgenden Aussagen machen:

Die Flächenschar $u = \text{const}$, an der das Vektorfeld

$$\boldsymbol{a} = a^i \, \boldsymbol{e}_i \tag{23}$$

tangential liegt, erhält man aus der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$a^i \, u_{,i} = 0 \,. \tag{24}$$

Es ist u r-mal stetig differenzierbar, wenn a^i r-mal stetig differenzierbar ist. Dies folgt nach der Charakteristikentheorie aus Satz 3 bei KAMKE [6] zusammen mit Satz 5.2 bei GRAUERT und FISCHER [7]. Wählt man $u = \text{const}$ als erste Koordinate eines r-mal stetig differenzierbaren Koordinatensystems, sind die Komponenten von $\boldsymbol{a}$ in diesem Koordinatensystem mindestens $(r-1)$-mal stetig differenzierbar. Damit ist x^2, das ja nach dem Satz von Poincaré aus den Komponenten von $\boldsymbol{a}$ durch Integration gewonnen werden kann, mindestens $(r-1)$-mal stetig differenzierbar.

In der hier gebrachten Form von (S5) sind die Voraussetzungen deutlicher formuliert als in dem Beweis von GRAD und RUBIN [8], die fordern, daß die Feldlinien, die eine querliegende Fläche durchsetzen, ein kleines Raumgebiet einfach bedecken sollen.

(S6) Ist ein von Null verschiedenes Vektorfeld $\boldsymbol{B}$ stetig differenzierbar und $\nabla \times \boldsymbol{B}$ zweimal stetig differenzierbar, so gilt

$$\boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = 0 \tag{25}$$

genau dann, wenn lokal eine zweimal stetig differenzierbare Funktion f und eine einmal stetig differenzierbare Funktion g existieren mit

$$\boldsymbol{B} = g \, \nabla f \,. \tag{26}$$

Man spricht dann von einem flächennormalen Vektorfeld.

Zu beweisen ist nur etwas, wenn $\nabla \times \boldsymbol{B} \not\equiv 0$ ist. In einer Umgebung, in der $\nabla \times \boldsymbol{B} \neq 0$ ist, läßt sich $\nabla \times \boldsymbol{B}$ als divergenzfreies Feld nach Satz (S5) in der Form schreiben

$$\boldsymbol{B} = \nabla x^1 \times \nabla x^2 . \tag{27}$$

Skalare Multiplikation mit ∇x^1 liefert

$$\nabla x^1 \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = \Lambda \cdot \boldsymbol{B} = 0 . \tag{28}$$

Wegen des ersten Teils von (S3) ergibt sich deshalb für $\boldsymbol{B}$ die Darstellung

$$\boldsymbol{B} = b_{,k} \nabla x^k + (b_1 - b_{,1}) \nabla x^1 . \tag{29}$$

Es ist $b_{,1} - b_1$ stetig differenzierbar und nicht nur eine Funktion von x^1, da $\nabla \times \boldsymbol{B}$ in der betrachteten Umgebung ungleich Null ist. Wählt man dann $b_{,1} - b_1$ als neue Koordinate x^2, hat auch in diesem Koordinatensystem $\nabla \times \boldsymbol{B}$ die Form (27). Die Gl. (25) lautet mit (29)

$$b_{,3} \cdot 1/\sqrt{g} = 0 . \tag{30}$$

Da deshalb der Skalar b nur von den Variablen x^1 und x^2 abhängt, kommen in der folgenden partiellen Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion a nur die Variablen x^1 und x^2 vor:

$$a_{,1} b_{,2} + a_{,2} (x^2 - b_{,1}) + a = 0 . \tag{31}$$

Da $\boldsymbol{B} \neq 0$ ist, hat (31) nach den üblichen Existenzsätzen für partielle Differentialgleichungen erster Ordnung eine stetig differenzierbare Lösung $a \neq 0$, die nicht von x^3 abhängt. Mit (29) und (31) folgt dann

$$\nabla \times a \boldsymbol{B} \equiv 0 . \tag{32}$$

Hiermit ergibt sich, daß $\boldsymbol{B}$ proportional zu einem Gradienten ∇f ist, mit

$$\boldsymbol{B} = (1/a) \nabla f = g \nabla f . \tag{33}$$

Damit ist die eine Richtung von (S6) bewiesen. Die Umkehrung folgt aus

$$\boldsymbol{B} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{B}) = g \nabla f \cdot (\nabla g \times \nabla f) = 0 . \tag{34}$$

Es ist zu beachten, daß es sich bei (S6) um eine *lokale* Aussage handelt. Die Verwendung von g und f als *globale* überall eindeutige Funktionen ist normalerweise nicht möglich. So zieht PICHAKCHI [9] in dem Beweis für die Nichtexistenz des „Kurzschlußdynamos“ die Darstellung flächennormaler Felder fehlerhaft für globale Aussagen heran. Bei dem folgenden Satz dagegen handelt es sich um eine *globale* Darstellung divergenzfreier Felder mit gewissem Symmetrieverhalten.

Wir betrachten ein Koordinatensystem x^1, x^2, x^3, in dem die Determinante g von g_{ik} unabhängig von x^1 ist. Wir nennen in einem solchen Koordinatensystem ein Vektorfeld $\boldsymbol{B}$ invariant bezüglich x^1, wenn alle Komponenten $B^i = \nabla x^i \cdot \boldsymbol{B}$ unabhängig von x^1 sind.

(S7) Ist das divergenzfreie Vektorfeld $\boldsymbol{B}$ endlicher Energie invariant bezüglich x^1, existieren eindeutige Skalare B^1 und c, so daß sich $\boldsymbol{B}$ in der Form schreiben läßt

$$\boldsymbol{B} = \Lambda c + B^1 \boldsymbol{e}_1$$

mit $\quad B^1 = \nabla x^1 \cdot \boldsymbol{B} , \quad \Lambda = \nabla x^1 \times \nabla . \qquad (35)$

Das Vektorfeld

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{B} - B^1 \boldsymbol{e}_1 \tag{36}$$

liegt tangential an der Flächenschar $x^1 = \text{const}$ und ist wegen der Invarianz von $\boldsymbol{B}$ bezüglich x^1 und der Divergenzfreiheit von $\boldsymbol{B}$ auch divergenzfrei. Deshalb läßt es sich nach (S3) in der Form

$$\boldsymbol{c} = \Lambda c \quad \text{mit} \quad \Lambda = \nabla x^1 \times \nabla \tag{37}$$

schreiben, wobei c bis auf eine additive Funktion von x^1 eindeutig ist und prinzipiell durch eine Integration aus $\boldsymbol{c}$ gewonnen werden kann. Die Eindeutigkeit von c läßt sich dann in der analogen Weise erledigen wie beim Beweis von (S2) in Abschnitt IV. Mit (S7) erhält man Darstellungen von translations-, rotations- und helikalsymmetrischen divergenzfreien Vektorfeldern durch zwei Skalare.

Die nach (S7) mögliche *globale* Darstellung rotationssymmetrischer divergenzfreier Vektorfelder ($x^1 = \varphi$, $x^2 = z$, $x^3 = r$) spielt eine entscheidende Rolle beim ersten befriedigenden Beweis für den Satz von Cowling (Nichtexistenz rotationssymmetrischer hydromagnetischer Dynamos) von BRAGINSKII [10].

IV. Der Beweis von (S2)

Zum Beweis von (S2) betrachte man die Differentialgleichung

$$\Lambda^2 a = \Lambda \cdot \Lambda a = \nabla x^1 \cdot \boldsymbol{B} . \tag{38}$$

Die Existenz von Lösungen kann man im wesentlichen damit sicherstellen, indem man zeigt, daß Λ^2 eine selbstadjungierte Fortsetzung besitzt. Für den fortgesetzten Operator steht dann der Spektralsatz selbstadjungierter Operatoren zur Verfügung. Wir verwenden hier das übliche Skalarprodukt im Hilbert-Raum der quadratintegrablen Funktionen. Die auf der rechten Seite von (28) vorkommende Funktion ist orthogonal zu den Lösungen der homogenen Gleichung.

Für die Praxis ist der Nutzen eines so allgemeinen Satzes nicht sehr groß; man muß sich sowieso auf Koordinatensysteme beschränken, für die man (38) wirklich allgemein lösen kann.

Entscheidend für die folgenden Umformungen ist die Beziehung

$$\mathrm{d}\tau = (\sqrt{g/g^*})\ \mathrm{d}F\ \mathrm{d}x^1 \tag{39}$$

für das Volumenelement, die Identität

$$\Lambda = (\sqrt{g^*/g})\ \Lambda^* \tag{40}$$

und die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes für jede Fläche der Schar $x^1 = \mathrm{const}$:

$$\begin{aligned}(a, \Lambda^2 b)_V &= \int_V a\, \Lambda\cdot\Lambda\, b\ \mathrm{d}\tau = \int_V \Lambda\cdot(a\,\Lambda\, b)\ \mathrm{d}\tau \\ &\quad - \int_V \Lambda\, a\cdot\Lambda\, b\ \mathrm{d}\tau \qquad (41)\\ &= \int \Lambda^*\cdot(a\,\Lambda\, b)\ \mathrm{d}F\ \mathrm{d}x^1 - \int_V \Lambda\, a\cdot\Lambda\, b\ \mathrm{d}\tau \\ &= \int \Big(\int_{R\mathrm{d}x^1=\mathrm{const}} a\,\Lambda\, b\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\Big)\ \mathrm{d}x^1 - \int_V \Lambda\, a\cdot\Lambda\, b\ \mathrm{d}\tau\,.\end{aligned}$$

Dies kann man in analoger Weise weiter umformen und erhält

$$\begin{aligned}(a, \Lambda^2 b)_V = &\int \Big(\int_{R\mathrm{d}x^1=\mathrm{const}} (a\,\Lambda\, b - b\,\Lambda\, a)\ \cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\Big)\ \mathrm{d}x^1 \\ &+ (\Lambda^2 a, b)_V\,. \qquad (42)\end{aligned}$$

Wenn die Funktionen des Definitionsbereichs von Λ^2 homogene Randbedingungen erfüllen, erhält man aus (42), daß Λ^2 in diesem Definitionsbereich symmetrisch ist; aus (41) erhält man, wenn man $a = b$ setzt, daß für diesen Definitionsbereich gilt

$$-(a, \Lambda^2 a)_V \geqq O\cdot(a, a)_V\,. \tag{43}$$

Da die unendlich oft differenzierbaren Funktionen, die homogene Randbedingungen am Rand der Schar $x^1 = \mathrm{const}$ erfüllen, eine dichte Teilmenge des betrachteten Hilbert-Raums sind, ist $-\Lambda^2$ symmetrisch und halbbeschränkt nach unten in diesem Definitionsbereich und besitzt deshalb nach Satz 2 bei HELLWIG [11] eine selbstadjungierte Fortsetzung.

Setzt man in (41) a gleich b, folgt, daß die einzigen Lösungen mit homogenen Randbedingungen der zu (38) gehörenden homogenen Gleichung Funktionen sind mit $\Lambda\, a = 0$; das heißt aber, daß a unabhängig von x^2 und x^3 ist. Für solche Funktionen gilt

$$\int a\,\nabla x^1\cdot\boldsymbol{B}\ \mathrm{d}\tau = (a, \nabla x^1\cdot\boldsymbol{B})_V = 0\,, \tag{44}$$

da $\boldsymbol{B}$ divergenzfrei ist. Dies kann man am einfachsten beweisen, wenn man ausnutzt, daß $\boldsymbol{B}$ als divergenzfreies Vektorfeld durch ein divergenzfreies Vektorpotential dargestellt werden kann und a homogene Randbedingungen erfüllt. Damit ist also gezeigt, daß die Inhomogenität von (38) orthogonal zu den Lösungen der homogenen Gleichung ist.

Die Forderung, daß a homogene Randbedingungen erfüllt, reicht bei einer Schar geschlossener Flächen noch nicht aus, daß aus $\Lambda\, a = 0$ auch folgt $a = 0$. Man erhält dies, wenn man dann von a zusätzlich fordert, daß der Mittelwert von a über jede Fläche $x^1 = \mathrm{const}$ Null ist. Dies ist möglich, da der Mittelwert von a nur eine Funktion von x^1 ist. Dann folgt aber auch aus (41), daß eine Lösung der Gleichung

$$\Lambda^2 a = 0\,, \tag{45}$$

die homogene Randbedingungen für die Flächen $x^1 = \mathrm{const}$ erfüllt und deren Mittelwert bei geschlossenen Flächen Null ist, nur Null sein kann.

Mit der eindeutigen Lösung a von (38) bilden wir das Vektorfeld

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} - \nabla\times\Lambda\, a\,. \tag{46}$$

Dieses Vektorfeld ist divergenzfrei und liegt wegen (38) tangential an der Flächenschar $x^1 = \mathrm{const}$. Nach Satz (S4) läßt es sich mit einem Skalar b in der Form schreiben

$$\Lambda\, b = \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} - \nabla\times\Lambda\, a\,. \tag{47}$$

Damit erhält man die Darstellung des divergenzfreien Feldes $\boldsymbol{B}$ durch die verallgemeinerten poloidalen und toroidalen Skalare a und b in der Form

$$\boldsymbol{B} = \Lambda\, b + \nabla\times\Lambda\, a\,. \tag{48}$$

Bei dieser Konstruktion ist die Eindeutigkeit von b noch nicht gewährleistet. Wendet man auf (48) den Operator $\Lambda\cdot$ an, stellt man fest, daß b eine Lösung der Differentialgleichung

$$\Lambda^2 b = \Lambda\cdot\boldsymbol{B} - \Lambda\cdot(\nabla\times\Lambda\, a) \tag{49}$$

ist mit der Randbedingung

$$\Lambda\, b\cdot\boldsymbol{t}\,|_{R\mathrm{d}x^1} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{t}\,|_{R\mathrm{d}x^1} - (\nabla\times\Lambda\, a)\cdot\boldsymbol{t}\,|_{R\mathrm{d}x^1}\,. \tag{50}$$

Die Differenz d zwischen b und einer weiteren Lösung von (49) mit der Randbedingung (50) ist eine Lösung von

$$\Lambda^2 d = 0 \quad \text{mit} \quad \Lambda\, d\cdot\boldsymbol{t}\,|_{R\mathrm{d}x^1=\mathrm{const}} = 0\,. \tag{51}$$

Setzt man in (41) $a = b = d$, folgt, daß $\Lambda\, d$ gleich Null ist; also ist d unabhängig von x^2 und x^3. Verlangt man also zusätzlich von den Lösungen von (49), (50), daß der Mittelwert der Lösung über jede feste Fläche $x^1 = \text{const}$ Null ist, erhält man eindeutige Lösungen. Damit ist der Beweis von (S2) abgeschlossen.

Die Beziehungen (19) und (39), die beim Beweis von (S2) neben dem Operator Λ^* (Graßmannsche Ergänzung des Nabla-Operators der Flächenschar) eine hervorragende Rolle spielen, sind interessanterweise auch sehr wichtig in der statistischen Mechanik, wenn man ein invariantes Maß auf den Flächen konstanter Energie definieren will (vgl. z. B. CHINTSCHIN [12]).

Ich danke der Deutschen Forschungsgemeinschaft für finanzielle Unterstützung und dem Referenten für den Hinweis, der zur vorliegenden verallgemeinerten Form von (S7) geführt hat. Herrn Prof. Dr. E. RICHTER danke ich sehr herzlich für die vielen anregenden Gespräche.

1 W. M. ELSASSER, Phys. Rev. **69**, 106 [1946].
2 G. BACKUS, A Class of Self-Sustaining Dissipative Dynamos, Annals of Physics **4**, 372 [1958].
3 P. M. MORSE u. H. FESHBACH, Methods of Theoretical Physics II, McGraw-Hill, New York 1953, S. 1766.
4 A. A. BLANK, K. O. FRIEDRICHS u. H. GRAD, Theory of Maxwell's Equations Without Displacement Current, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences Report NYO-6486-V [1957].
5 G. GERLICH, Tensorpotentiale in der Magnetohydrodynamik und das Dynamoproblem, Diss., Technische Universität Braunschweig 1970.
6 E. KAMKE, Differentialgleichungen I, 4. Aufl., Akad. Verlagsges. Geest & Portig, Leipzig 1962, S. 124.
7 H. GRAUERT u. W. FISCHER, Differential- und Integralrechnung II, Heidelberger TB, Bd. 36, Springer-Verlag, Berlin 1968, S. 92.
8 H. GRAD u. H. RUBIN, Hydromagnetic Equilibrium and Force-free Fields, Proceedings of the Second United Nations Intern. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy, Geneva 1958, Vol. 31, S. 195.
9 L. D. PICHAKCHI, Sov. Phys. JETP **23**, 542 [1966].
10 S. I. BRAGINSKII, Sov. Phys. JETP **20**, 726 [1965].
11 G. HELLWIG, Differentialoperatoren der mathematischen Physik, Springer-Verlag, Berlin 1964, S. 185.
12 A. J. CHINTSCHIN, Mathematische Grundlagen der statistischen Mechanik, BI, Mannheim 1964, Bd. 58/58a, S. 41 ff.

Algebraische Lösung des Eigenwertproblems im $N\Theta\Theta$-Sektor des Lee-Modells

K. HELMERS † und H. v. DEWITZ

(Z. Naturforsch. **27 a**, 1172—1176 [1972]; eingegangen am 12. Juni 1972)

An Algebraic Solution of the Eigenvalue Problem in the $N\Theta\Theta$-Sector of the Lee-Model

Trying to write the $N\Theta$-eigenstates of the Lee-model in a more compact way, we define operators containing the $N\Theta$-scattering-amplitudes. With these operators, the structure of the Hamiltonian can be strongly simplified. — It is now possible to solve the eigenvalue-problem in the $N\Theta\Theta$-sector with few simple, pure algebraic, calculations.

1. Einleitung

Es ist bekannt, daß die stationären Zustände im $N\Theta\Theta$-Sektor des LEE-Modells [1] aus der Lösung der KÄLLÉN-PAULIschen Integralgleichung [2] bestimmt werden können. Sie wurde von verschiedenen Autoren [3−8] unter Benützung der Theorie der analytischen Funktionen berechnet und in geschlossener Form dargestellt. — Andererseits hat FIVEL [9] gezeigt, daß man das Eigenwertproblem im $N\Theta\Theta$-Sektor auch auf rein algebraischem Wege lösen kann. Seine Methode besteht darin, den Hamilton-Operator so zu transformieren, daß ein Problem mit separablem Potential entsteht, das auf ein System linearer Gleichungen reduziert werden kann. Die erforderlichen Rechnungen sind aber sehr kompliziert; insbesondere ist es schwierig, seine Lösung mit der der vorher erwähnten Autoren zu vergleichen. — BOLSTERLI [10] verwendet die ladungserhöhenden Operatoren a_k^* und $v^* N$, um vom $N\Theta$- in den $N\Theta\Theta$-Sektor zu gelangen.

Ähnlich verfahren v. DEWITZ-HELMERS [11], um die Resolvente in diesem Sektor zu berechnen, mit der man über die Lippmann-Schwinger-Gleichungen das Eigenwertproblem lösen kann.

In der vorliegenden Arbeit soll der Hamilton-Operator auf die Form $H = \int \mathrm{d}q\, q_0\, c_q^*\, c_q$ gebracht werden. Die Operatoren c_q^*, c_q enthalten die α- und β-Amplituden der Eigenzustände des $N\Theta$-Sektors. Durch diese vereinfachte Struktur von H kann das Eigenwertproblem im $N\Theta\Theta$-Sektor sehr leicht und auf rein algebraischem Wege gelöst werden.

Sonderdruckanforderungen an H. v. DEWITZ, Lehrstuhl Prof. Dr. G. SÜSSMANN, Sektion Physik der Universität München (Theoret. Physik), *D-8000 München 13*, Schellingstr. 4/III.